ИЗВЕСТИЯ ТПУ. 2013. Т323. №2

УДК 531.01.

КОВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПОВ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

А.И.Родионов

Новосибирский Государственный Технический Университет,
E-mail: teormech@ngs.ru

Представлен авторский взгляд на систему дифференциальных вариационных Принципов и Уравнений механики систем с произвольными дифференциальными связями. Он основан на варианте Расширения классической механики, описывающий динамику голономных и неголономных систем произвольных порядков. Для несвободной системы вводится ее Изображающая Точка (*ИТ*). Она движется в пространстве E_{3N} по многообразию R_m, стеснённому также дифференциальными связями. На основе уравнений движения *ИТ* выводятся ковариантные формы Уравнений и Принципов механики неголономных систем высших порядков.

Ключевые слова:
Системы с произвольными дифференциальными связями; дифференциальные вариационные принципы механики неголономных систем произвольных порядков, *ИТ* системы и её уравнения движения, ковариантные формы уравнений движения и принципов.

Key words:
Systems with any differential constraints; differential variation principles of mechanics of any orders nonholonomic systems, Affix of systems, Affix's motion equations, covariant forms of motion equations and principles.

Введение

Современное состояние и развитие мехатроники, авионики и точной электромеханики поставило вопрос об адекватных механических моделях динамики систем управляемого движения с полными и неполными дифференциальными программами движения высших порядков. К таким системам относятся системы, управляемые по резкости-рывку и производным более высоких порядков.

Во второй половине XX-века стало понятно, что большой класс движений систем управляемых по программе может быть описан как класс систем с голономными и неголономными связями общего вида. А уравнения связей исполняют роль программ движения. В рамках одного формализма эти связи могут быть определены как дифференциальные высших порядков.

Известно, что построение механики твердых тел и распределенных систем на основе дифференциальных и интегральных вариационных Соотношений и Принципов является устоявшейся научной традицией [1,2,4,5]. И с развитием вычислительных методов и техники приобрело большое практическое значение. Разделение всех Принципов на вариационные Соотношения и собственно Принципы признается рядом авторов и имеет в рамках вариационного исчисления глубокий смысл. Придерживаясь этой точки зрения, мы всё же будем называть в дальнейшем Соотношения и собственно Принципы для краткости Принципами. В данной работе рассмотрим подробно только уравнения движений и дифференциальные Принципы произвольных порядков и в силу ограничений на объём статьи. Каковы же эти Уравнения и Принципы?

Ответ на эти вопросы был получен в [4] и в наших работах [6-13]. Так в статьях [6,9] были выведены уравнения движения систем с идеальными по Гартунгу – Добронравову [5] дифференциальными связями высших порядков непосредственно из основных положений классической механики. А в работах [10-13] описаны основы динамики систем с произвольными дифференциальными связями, приведены примеры задач и их решения. В статье [7] на основе результатов работы [6] были получены дифференциальные вариационные Принципы для систем с идеальными по Гартунгу - Добронравову дифференциальными связями высших порядков и доказана их необходимость и достаточность.

О дифференциальных Принципах

При дифференциальных связях вида $\begin{cases} \varphi^p = \varphi^p(t, \chi_i, \dot{\chi}_i, \dots, \overset{(k)}{\chi}_i) = 0 \\ p \le 3N - 1,\ i = 1,2,\dots,3N,\ \mathrm{k} \ge 2 \end{cases}$, Принципы систем с идеальными по Гартунгу - Добронравову дифференциальными связями высших порядков выглядят согласно [7] так:

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{d^{(k-q)}}{dt^{(k-q)}} \left(\mathbf{f}_\ell - m_\ell \mathbf{a}_\ell\right) \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{r}}_\ell = 0\,. \qquad (1)$$

Здесь: δ_k -частная изохронная вариация вектора $\overset{(k)}{\mathbf{r}}_\ell$, q *=1*-для нелинейных, а q *=2*-для линейных по $\overset{(k)}{\mathbf{r}}_\ell$ связей. Оказалось, что один из Принципов (1) при q *=2* эквивалентен Принципу из [4] для систем с линейными по $\overset{(k)}{q}{}^j$ уравнениями связей.

Что же касается известных Принципов и вариационных Соотношений, то исторически они были сформулированы как независимые. И каждый имел своё собственное обоснование и интерпретацию. Принципы Даламбера - Лагранжа (k=0), Суслова - Журдена (k=1), Гаусса (k=2), Манжерона - Делеану (k$\geq$3) в предложенных обозначениях имеют вид: $\sum_{l=1}^{N} \left(\mathbf{f}_\ell - m_\ell \mathbf{a}_\ell\right) \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{r}}_\ell = 0.$ Обратим внимание на то, что Принцип Даламбера - Лагранжа необходим и достаточен для описания движения голономных систем и систем с линейными по скоростям неголономными связями. Принцип Суслова – Журдена - для голономных систем и систем с произвольными по скоростям неголономными связями. Принцип Гаусса - для голономных систем, систем с произвольными по скоростям и линейными по ускорениям неголономными связями. И для описания движения классических голономных и неголономных управляемых систем этих Принципов вполне достаточно. Так именно Принцип Гаусса позволил в работе [14] получить вариационное условие и замкнуть систему уравнений, описывающую процесс удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству

Естественно возник вопрос о полной системе дифференциальных Принципов Механики в рамках Парадигмы классической механики, адекватных различным типам дифференциальных связей. Такая система Принципов для систем с идеальными по Гартунгу - Добронравову дифференциальными связями была выведена в векторной форме и представлена в виде таблицы в работе [8].

Изображающая Точка системы и её уравнения движения

Для вывода полной системы дифференциальных Принципов мы воспользовались в [8] понятием Изображающей Точки системы (*ИТ*) [4-6], движущейся несвободно в абстрактном пространстве E_{3N} по многообразию R_m.

Представим $\mathbf{r}_\ell(x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ как $\mathbf{r}_\ell(\chi_{3\ell-2}, \chi_{3\ell-1}, \chi_{3\ell})$ а $\mathbf{f}_\ell(X_\ell, Y_\ell, Z_\ell)$ как $\mathbf{f}_\ell(f_{3\ell-2}, f_{3\ell-1}, f_{3\ell})$, $m_\ell = m_{3\ell-2} = m_{3\ell-1} = m_{3\ell}$; $M = \sum_{l=1}^{N} m_\ell$. Введем, как это сделано в [4,7-13] *ИТ*, имеющую массу *M*, радиус-вектор $\mathbf{x}(x_i)$, где $x_i = \chi_i \sqrt{\mu_i}$, $\mu_i = m_i / M$, $i = 1,2,...,3N$. Тогда, согласно [10] система векторных уравнений движения *ИТ*, приведённая к одному дифференциальному порядку и подобная уравнениям Лагранжа 1-го рода, примет вид:

$$\begin{cases} M \overset{(s)}{\mathbf{x}} = \overset{(r)}{\mathbf{F}} + \lambda_p \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\mathbf{x}} + \mathbf{T_k}, \mathbf{T_k} \perp \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\mathbf{x}} \quad \text{a)} \\ d_t \varphi^p = (\partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\mathbf{x}}) \overset{(s)}{\mathbf{x}} + \Psi^p(t, x_i, ... \overset{(s-1)}{x_i}) = 0 \quad \text{b)} \\ p = n \le 3N - 1;\ q = 1,2;\ \mathrm{s = r + 2,\ r = 0\ при\ k \le 1,\ r} = k - q \ \text{при}\ \mathrm{k \ge 2.} \end{cases} \qquad (2)$$

В уравнениях (2) и далее предполагается суммирование по двойному немому индексу в соответствии с правилом Эйнштейна. Здесь: *3N*-мерные векторы Силового Фактора Задаваемых Сил $\overset{(r)}{\mathbf{F}_i}(F_i)$, $F_i = (f_i / \sqrt{\mu_i})$. Неопределенные множители Лагранжа λ_p могут быть представлены в разных видах, удобных при численном решении конкретных прикладных задач: $\lambda_p = \lambda_p(t) = \overset{(r+2)}{\mu_p} = \overset{(r)}{\eta_p}$. n - общее число линейных и нелинейных связей *k*-го и связей более низких порядков, приведенных к единому дифференциальному виду $\varphi^p = \varphi^p(t, x_i, \dot{x}_i, ..., \overset{(k)}{x_i}) = 0.$

Введем Силовой фактор ”потерянных сил” сил $\mathbf{P}$ [2, 5,6] как $\mathbf{P} = \mathbf{F} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}$. Тогда, например, Принцип Даламбера-Лагранжа примет вид: $(\mathbf{P} \cdot \delta_0 \mathbf{x}) = 0$, а Принципы (1) будут выглядеть так:

$$\begin{cases} (\overset{(r)}{\mathbf{P}} \cdot \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{x}}) = 0,\ \mathrm{r} = k - q, \\ \mathrm{k} \ge 2, \qquad q = 1,2. \end{cases} \qquad (3)$$

Выражение (3) задаёт пару дифференциальных вариационных Принципов, описывающих движение неголономных систем k-го порядка. Здесь при *q*=1 имеем дифференциальное вариационное Соотношение, а при *q*=2 - собственно вариационный Принцип [7], которому можно придать вид:

$$\delta_k Z_{k-2} = 0, \qquad Z_{k-2} = (\overset{(k-2)}{\mathbf{P}})^2 / 2M \qquad (4)$$

В этой форме Принцип (4) подобен по виду Принципу Гаусса и при *k=2* тождественен ему. При этом функция Z_0 равна Принуждению по Гауссу Zw [1,2,4-7]. Исходя из этого, назовём функцию Z_s Принуждением s-го порядка. Заметим, что Принцип (4) эквивалентен Принципу, предложенному в работе [4]. Обратим внимание на то, что все представленные выше дифференциальные вариационные Принципы могут быть заданы одной формулой: $(\overset{(r)}{\mathbf{P}} \cdot \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{x}}) = 0$, где r=0 при $k \le 1$, $r = k - q$ при $k \ge 2$, $q = 1,2$.

Ковариантные аналитические формы уравнений движения

Для решения конкретных практических задач механики управляемого движения выведем более удобные аналитические формы уравнений движения и дифференциальных Принципов высших порядков. “Соотношение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, q^j)$, выражающее декартовы координаты через обобщенные, выделяет в E_{3N} риманово многообразие R_m. Задача состоит в представлении движения материальной системы с помощью терминов геометрии R_m“ [7]. Эта задача была решена в [6,11-13]. Согласно этим работам все ковариантные формы уравнений движения выводятся единообразно путём скалярного умножения (4) на координатные векторы $\mathbf{e}_j = \partial\mathbf{x}/\partial q^j = \partial\dot{\mathbf{x}}/\partial\dot{q}^j = \ldots$ с последующими алгебраическими и дифференциальными преобразованиями для той или иной формы уравнений. Таким образом, получим следующие ковариантные формы уравнений движения.

***R$_m$Q*-форма**, подобная уравнениям движения в обобщённых силах:

$$\begin{cases} \dfrac{d^{(r)}}{dt^{(r)}}\left[\left(Q_i^P\right)\mathbf{e}^i\right]\mathbf{e}_j + \lambda_p(\partial f^p/\partial \overset{(k)}{q^j}) + \Theta_{kj} = 0 \\ df^p/dt = (\partial f^p/\partial \overset{(k)}{q^j})\overset{(s)}{q^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(s-1)}{q^j}) = 0 \\ i, j = 1,2,\ldots,m,\ \ p \le n \le m-1,\ \ q = 1,2,\ \mathrm{s = r + 2}, \\ \mathrm{r = 0\ \ при\ \ \ k \le 1,\ \ r} = k - q\ \ \mathrm{при\ \ \ k \ge 2} \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь: $Q_i^P = Q_i^F + Q_i^\Phi$, Q_i^F - i - я задаваемая обобщенная сила,
$Q_i^\Phi = -\left[\dfrac{d}{dt}((\partial T/\partial\dot{q}^i)) - \partial T/\partial q^i\right] = -\partial S/\partial\ddot{q}^i = \ldots$ i - я - обобщенная сила инерции,
$f^p = f^p(t, q^j, \ldots, \overset{(k)}{q^j}) = 0$ -уравнения связей представленные в терминах геометрии R_m, $\mathbf{e}^i$ - координатные векторы взаимного базиса в касательном к R_m пространстве E_m, $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$;, g^{ij} - контравариантные компоненты метрического тензора пространства R_m, определяемые выражением для кинетической энергии системы [4,5]. $\Theta_{kj} = (\mathbf{T_k} \cdot \mathbf{e}_j)$ Заметим, что при градиентном управлении движением $\Theta_{kj} = 0$.

***R$_m$A*- форма**, подобная уравнениям Аппеля:

$$\begin{cases} \partial K_{(s)}/\partial \overset{(s)}{q^j} = Q_j^{(r)} + \lambda_p(\partial f^p/\partial \overset{(k)}{q^j}) + \Theta_{kj} \\ (\partial f^p/\partial \overset{(k)}{q^j})\overset{(s)}{q^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(s-1)}{q^j}) = 0 \\ j = 1,2,\ldots,m,\ \ \ p = 1,2,\ldots,n \le m-1, \\ \begin{cases} q = 1,2,\ \mathrm{s = r + 2}, \\ \mathrm{r = 0\ \ при\ \ k \le 1, r} = k - q\ \ \mathrm{при\ \ \ k \ge 2}, \end{cases} \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь, согласно [6, 10-13]: K_s есть универсальная кинетическая мера движения s-го порядка – Кинэта. $K_s = M(\overset{(s)}{\mathbf{x}})^2/2 = \dfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell(\overset{(s)}{\mathbf{r}_\ell})^2$; $K_{(s)}$-часть кинэты, квадратично зависящая от $\overset{(s)}{q^j}$, $Q_J^{(r)}$- есть Обобщенный Силовой Фактор r-го порядка: $Q_j^{(r)} = (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{\ell=1}^{N}\left(\overset{(r)}{\mathbf{F}_\ell} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\ell}{\partial q^j}\right)$. Заметим, что при r=0 уравнения движения в R_mA-форме становятся уравнениями Аппеля.

***R_mΛ*-форма**, подобная уравнениям Лагранжа:

$$\begin{cases} \overset{\wedge}{\Lambda}{}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) = Q_j^{(r)} + \lambda_p(\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j) + \Theta_{kj} & \text{а)} \\ (\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j)\overset{(r+2)}{q}{}^j + W^p = 0 & \text{б)} \\ j = 1,2,\ldots,m, \quad p = 1,2,\ldots,n \le m-1, \\ \begin{cases} q = 1,2, \\ \mathrm{r} = 0 \ \text{при} \ \mathrm{k} \le 1, \mathrm{r} = k - q \ \text{при} \ \mathrm{k} \ge 2. \end{cases} \end{cases} . \qquad (8)$$

Здесь: $\overset{\wedge}{\Lambda}{}_j^{(r+1)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{(r+1)}{q}{}^j}\right) - \frac{1}{r+1}\frac{\partial}{\partial \overset{(r)}{q}{}^j}$. Назовём этот дифференциальный оператор оператором *Эйлера-Лагранжа* порядка (r+1). Заметим, что при q=1 уравнения (9а) будут выглядеть так:

$\overset{\wedge}{\Lambda}{}_j^{(k)}(K_{(k)}) = Q_j^{(k-1)} + \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j + \Theta_{kj}$. А при r=0 эти уравнения становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода.

Уравнения движения в Обобщенных Силовых Факторах (*R_mQ*^(r) – форма)

$$\begin{cases} Q_{\Phi j}^{(r)} + Q_j^{(r)} + Q_{\lambda j}^{(r)} + \Theta_{kj} = 0 \\ (\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j)\overset{(r+2)}{q}{}^j + W^p = 0 \\ j = 1,2,\ldots,m, \quad p = 1,2,\ldots,n \le m-1, \\ q = 1,2; \ \mathrm{r} = 0 \ \text{при} \ \mathrm{k} \le 1, \mathrm{r} = k - q \ \text{при} \ \mathrm{k} \ge 2 \end{cases} . \qquad (9)$$

Здесь Обобщённые Силовые Факторы $Q_{\Phi j}^{(r)}$ и $Q_{\lambda j}^{(r)}$, согласно [9-11], равны:

$Q_{\Phi j}^{(r)} = -\partial K_{(s)} / \partial \overset{(s)}{q}{}^j = -\overset{\wedge}{\Lambda}{}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)})\ldots$

$j = 1,2,\ldots,m,$ $\mathrm{s} = \mathrm{r} + 2,$ $q = 1,2; \mathrm{r} = 0$, $Q_{\lambda j}^{(r)} = \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j$.

при $\mathrm{k} \le 1, \mathrm{r} = k - q$ при $\mathrm{k} \ge 2$,

Отметим, что при r=0 УДОСФ эквивалентны *уравнениям движения в обобщённых силах* [9].

Ковариантные аналитические формы Принципов

Получим ковариантные формы записи дифференциальных Принципов Механики из уравнений (6-9).

***R_mQ* - форма Принципов**. Умножим (6) на $\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j$ и просуммируем по j. С учётом того, что $f^p = 0$ и $\delta_k f^p = (\partial f^p / \partial \overset{(s)}{q}{}^j)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0$ получим:

$$\begin{gathered} \left(\frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}}\left[\left(Q_i^P\right)\mathbf{e}^i\right]\mathbf{e}_j + \Theta_{kj}\right)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0, \\ i, j = 1,2,\ldots,m, q = 1,2; \mathrm{r} = 0 \ \text{при} \ \mathrm{k} \le 1, \ \ \mathrm{r} = k - q \ \text{при} \ \mathrm{k} \ge 2\ldots \end{gathered} . \qquad (10)$$

В такой форме Принципы (10) при $\Theta_{kj} = 0$ приведены в [9].

R

$R_m A$ форма Принципов. Уравнениям (7) соответствуют Принципы:

$$(\partial K_{(s)} / \partial \overset{(s)}{q}{}^j - Q_j^{(r)} - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0$$
$$j = 1,2,\ldots,m, \mathrm{s = r + 2},\ q = 1,2; \mathrm{r = 0} \quad , \qquad (11)$$
$$\text{при} \quad \mathrm{k} \le 1, \quad \mathrm{r} = k - q \ \text{при} \quad \mathrm{k} \ge 2$$

которые выводятся из них аналогично Принципам (10). Если ввести *характеристическую функцию* R_s, определяющую состояние движения системы при *векторе задаваемых сил* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, q^j, \dot{q}^j)$ как $R_s = K_{(s)} - Q_j^{(r)} \cdot \overset{(s)}{q}{}^j$, то Принципы (11) примут вид:

$$(\partial R_s / \partial \overset{(s)}{q}{}^j - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0;$$
$$j = 1,2,\ldots,m, \mathrm{s = r + 2},\ q = 1,2;\ \mathrm{r = 0}$$
$$\text{при} \quad \mathrm{k} \le 1, \quad \mathrm{r} = k - q \ \text{при} \quad \mathrm{k} \ge 2$$

Заметим, что при q = 2 и $\Theta_{kj} = 0$ имеем собственно Принцип, который может быть записан так:

$$\delta_k R_k = 0\,. \qquad (12)$$

Нетрудно показать, что $R_s = Z_{(r)}$. Здесь $Z_{(r)}$- зависящая квадратично от $\overset{(k)}{q}{}^j$ часть функции Z_r. Действительно,

$$R_s = M(\overset{(r)}{\mathbf{a}})^2/2 - (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_j)\overset{(s)}{q}_j = M(\overset{(r)}{\mathbf{a}})^2/2 - (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \overset{(r)}{\mathbf{a}}) =$$
$$= (M(\overset{(r)}{\mathbf{a}})^2/2 - (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \overset{(r)}{\mathbf{a}}) + (\overset{(r)}{\mathbf{F}})^2/2M)_{(s)} = Z_{(r)}$$

Это доказывает эквивалентность (4) и (12).

При $\Theta_{kj} = 0$ и с учётом того, что $\partial Z_{(r)} / \partial \overset{(s)}{q}{}^j = \partial Z_r / \partial \overset{(s)}{q}{}^j$, Принципы (11), и (12) примут вид: $(\partial Z_r / \partial \overset{(s)}{q}{}^j)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0$, $\qquad \delta_k Z_{k-2} = 0\,.$ (13)

Соответствующий вид будут иметь и уравнения движения в этой форме:

$$\partial Z_r / \partial \overset{(s)}{q}{}^j = \lambda_p f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j + \Theta_{kj}\,. \qquad (14)$$

Назовём (13) и (14) $R_m GA$-формой Принципов и Уравнений.

$R_m \Lambda$ - форма Принципов. В этой форме Принципы выглядят так:

$$(\hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) - Q_j^{(r)} - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0 \qquad . \qquad (15)$$
$$j = 1,2,\ldots,m,\ q = 1,2;\ \mathrm{r = 0}\ \text{при} \ \ \mathrm{k} \le 1, \quad \mathrm{r} = k - q \ \text{при} \quad \mathrm{k} \ge 2$$

Они выводятся аналогично Принципам (10) и при q=1 и $\Theta_{kj} = 0$ имеют вид:

$$\left(\hat{\Lambda}_j^{(k)}(K_{(k)}) - Q_j^{(r)}\right)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0$$

Заметим, что эта форма Принципов также допускает введение характеристической функции $R_{r+1} = Z_{(r-1)}$ для систем с r=1,2,... и вектором задаваемых сил вида $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, q^j)$. Действительно,

$$Q_j^{(r)} = (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_j) = (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \partial \overset{(r+1)}{\mathbf{x}} / \partial \overset{(r+1)}{q^j}) = \frac{d}{dt}(\overset{(r-1)}{\mathbf{F}} \cdot \partial \overset{(r+1)}{\mathbf{x}} / \partial \overset{(r+1)}{q^j}) - (\overset{(r-1)}{\mathbf{F}} \cdot \partial \overset{(r+1)}{\mathbf{x}} / \partial \overset{(r)}{q^j})/(r+1) \qquad (16)$$

С учётом (16) Принципы (15) примут вид:

$$\begin{gathered}(\hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(R_{r+1}) - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q^j} = 0 = (\hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(Z_{(r-1)}) - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q^j}, \\ j = 1,2,...,m, \; q = 1,2; \; \mathrm{r} = k - q \geq 1\end{gathered} \qquad (17)$$

где $R_{r+1} = K_{(r+1)} - (\overset{(r-1)}{\mathbf{F}} \cdot \overset{(r-1)}{\mathbf{a}}) = Z_{(r-1)}$, а Принцип (15) будет выглядеть так:

$$(\hat{\Lambda}_j^{(k)}(Z_{(k-1)}) - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q^j} = 0.$$

Соответствующий вид будут иметь и уравнения: $\hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(Z_{(r-1)}) = \lambda_p f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + \Theta_{kj}$.

Назовём (17) *$R_m G\Lambda$-формой* Принципов и Уравнений.

***$R_m Q^{(r)}$* – форма Принципов**. Этой универсальной форме записи уравнений (9) соответствуют Принципы:

$$\begin{gathered}\left(Q_{Pj}^{(r)} - \Theta_{kj}\right)\delta_k \overset{(k)}{q^j} = 0, \\ j = 1,2,...,m, \; q = 1,2; \; \mathrm{r} = 0 \text{ при } \mathrm{k} \leq 1, \; \mathrm{r} = k - q \text{ при } \mathrm{k} \geq 2\end{gathered} \qquad (18)$$

где $Q_{Pj}^{(r)} = Q_{\Phi j}^{(r)} + Q_{Fj}^{(r)}$ и $Q_{Fj}^{(r)} = Q_j^{(r)}$.

Здесь обобщённый силовой фактор инерции $Q_{\Phi j}^{(r)}$ может быть вычислен по любой из приведенных выше формул, а сами Принципы могут быть представлены в Представлениях взаимодействующих парциальных движений и взаимодействующих тел [9].

Заключение. Возможны и другие ковариантные формы уравнений движения и Принципов неголономных систем высших порядков, которые в данной статье не рассматриваются. Интегральные вариационные Принципы, опивающие движения неголономных систем высших порядков, будут рассмотрены в следующей работе. Представленные нами результаты могут быть положены в основу целого ряда более детальных исследований в области теории неголономных систем высших порядков. Естественным образом они могут стимулировать и уже породили появление ряда прикладных работ в различных областях неголономной механики, мехатроники, электромеханики и электродинамики [12,13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Ланцош К. Вариационные Принципы Механики. - М.: Мир, 1965. - 408 с.

2.Полак А.С. Вариационные Принципы Механики - М.: ГИФ-МЛ, 1960. - 599 с.

3.Коренев Г.В. Введение в механику управляемого тела. - М.: Наука, 1964 - 568с.

4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х. Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. - С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2002. – 275с.

5.Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. - М.: Высшая школа, 1970. - 269 с.

6.Родионов А.И. Уравнения движения неголономных систем высших порядков. // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. - 1997. - № 2(7). - С. 85-96.

7.Родионов А.И. Принципы неголономной механики высших порядков // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. - 1998. - № 1(10). - С.69-78.

8.Родионов А.И. О дифференциальных принципах механики. // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. - 1998. - № 2(11). - С.124-134.

9.Остроменский П.И., Родионов А.И. Составление и исследование уравнений движения голономных и неголономных систем методом обобщенных сил. // Вестник Новосибирского государственного технического университета. - 1997. - № 1(3). – С.121-140.

10. Родионов А.И. К динамике мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения // Вестник Сибирской государственной геодезической академии - 2002. - Выпуск 7. - С. 205-211.

11. Rodionov A.I., Kaveshnikov V.M. On dynamics of mechatronic systems with incomplete differential programs of motion // IFTOMM-2004: Proc. of 11 Wold Cong. in Mech. and Machine Science. - Tianjin, China. 2004. – Vol. 3 “Mechatronics”. - P.1331-1335.

12. Родионов А.И., Сырецкий Г.А. Разомкнутые модели управления движением транспортных систем третьего порядка // Транспорт: Наука, техника, управление - 2011 - №4. - С. 12-15.

13. Родионов А.И. Уравнения аналитической динамики систем с дифференциальными связями произвольных порядков. Ч.1. // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. - 2012. - №4(49). - С.99-106.

14. Родионов А.И., Матвеев К.А. К динамике удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. - 2012. - № 1(46).- С.93-108.

Поступила .04.2013 г.

Сведения об авторе:

Родионов Андрей Иванович, 1948 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Новосибирского государственного технического университета, г. Новосибирск. Р.т. 8-(383-3)-46-17-77. E-mail: teormech@ngs.ru. Область научных интересов: теоретическая и прикладная механика, механика деформируемого твердого тела, общая и теоретическая физика.